連続体の関数空間(位相空間論と集合論の研究)

小山, 晃

数理解析研究所講究録
584巻 1986年 52-56

連続体の関数空間

大阪教育大学　小山 晃 (Akira Koyama)

ここで考える空間はすべて連続体 (= continuum = compact connected metric space) とする。連続体 X からのすべての実数値連続関数全体の集合に各点収束の位相をいれた空間を、$C_p(X)$、と表わす。

$C_p(X)$ に関して Pavlovskii [　] が興味ある結果を示している。

<u>定理</u> 1、(1) 連続体 X, Y について、$C_p(X) \simeq C_p(Y)$ ならば、$\dim X = \dim Y$、ここで $\simeq$ は linear isomorphic であることを表わす。

(2) 有限多面体 P, Q について、$C_p(P) \simeq C_p(Q)$ である必要十分条件は、$\dim P = \dim Q$ であることである。

(3) 2次元連続体 (実際 Pontryagin の連続体) B で、$C_p(B) \not\simeq C_p(I^2)$ であるものが存在する。

ここでは、この結果を動機として次のような問題を考えていく。得られた結果は、岡田順直 (香川大教育) との協同研究に

よるものである。

問題1、任意の n 次元ANR X について、$C_p(X) \cong C_p(I^n)$ か?

定理1(2)から考えて自然な発想と思われるが、Borsuk[ ], Theorem VI (6.1) によって否定的に解けることがわかる。ただし、1次元連続体については、次のようなことがわかる。

定義: 空間 X の点 p について、$\mathrm{ord}_p X \leq n$, であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、open subset U of X

s.t. $p \in U$, $\mathrm{diam}[U] < \varepsilon$ かつ $\mathrm{card}(\mathrm{Bd}(U)) \leq n$

が存在することをいう。

$\mathrm{ord}_p X \geq 3$ である点 $p \in X$ を分岐点という。また、分岐点全体の集合を $R(X)$ と表わすことにする。

定理2、1次元AR(=dendrite) X について、$\mathrm{card}(R(X)) < \aleph_0$ ならば、$C_p(X) \cong C_p(I)$ である。

系. 1次元ANR X に対して、連続体 $Y \subset X$

s.t. $Y \supset R(X)$ かつ $\mathrm{card}(R(Y)) < \aleph_0$

が存在するならば、$C_p(X) \cong C_p(I)$ である。

これまでの結果から、系の逆が成り立つと思われるが、まだわからない。すなわち、

<u>問題</u> 2. 1次元 ANR X について、$C_p(X) \underset{\sim}{\triangle} C_p(I)$ ならば、連続体 $Y \subset X$ s.t. $R(X) \subset Y$ かつ $\mathrm{card}(R(Y)) < \aleph_0$; が存在するか？

連続体 X について、$C_p(X) \underset{\sim}{\triangle} C_p(I^n)$ ならば、X は locally connected であると思われるかもしれないが、the $\sin\frac{1}{x}$-curve, the Warszawa circle 等があるので、1次元に限っても、X の local connectivity は導かれない。特に、次のような class が指定できる。

<u>定理</u> 3. 連続な全単射 $f : [0,1) \longrightarrow X$ が存在する連続体 X について、$C_p(X) \underset{\sim}{\triangle} C_p(I)$ が成り立つ

そこで、次のような問題が自然に考えられる。

<u>問題</u> 3. $C_p(X) \underset{\sim}{\triangle} C_p(I^n)$ となる n 次元連続体 X を特徴づけよ。

<u>定義</u>: 空間 X が locally contractible at a point p of X であるとは、任意の nbd U of p in X に対して、

$\exists$ nbd V of p in U s.t. V が contractible in U である

が存在することをいう。

また、$LC(X)=\{x\in X \mid X$ は locally contractible at x である$\}$ とする。

この概念を用いて、問題3の部分解が次のように得られる。

__定理__ 4、 $\dim_x X=n$ となる点 $x\in X$ を dense に含む n 次元連続体 X について、$C_p(X)\underset{\sim}{\Delta} C_p(I^n)$ ならば、$LC(X)$ は dense in X である

特に、1次元の場合に限れば、I を含むもう少し大きな class について簡単な判定条件が得られる。

__定義__. 連続体 X が finitely Suslinian であるとは、任意の $\varepsilon>0$ に対して、直径が ε より大きな互いに交わらない X の部分連続体は、高々有限個しか存在しないことをいう。

__定義__. 空間 X が locally connected at a point p of X であるとは、任意の nbd U of p in X に対して、connected open nbd V of p in U が存在することをいう。

また、$L(X)=\{x\in X \mid X$ は locally connected at x である$\}$ とする。

__定理__ 5、 1次元連続体 X について、finitely Suslinian である連続体 Y で、$C_p(X)\underset{\sim}{\Delta} C_p(Y)$ となるものが存在するならば、$L(X)$ は dense in X である。

定理4, 定理5 を用いると、互いに異なる関数空間をもつ同次元連続体が、Pontryagin のもののような複雑なものでなく、視覚的な範囲で、容易に構成することができる。また、snake-like 連続体でも、

$I=[0,1]$, the Knaster continuum, the pseudo-arc

などは、互いに異なる関数空間をもつことが知られる。

ここまでは、連続体について考えてみたが、Pavlovskii [ ] 自身は、定理1 (1) を non-compact, non-metrizable case でも証明している。そのような場合、定理1 (2) はおもしろい問題を与えるだろう。すなわち、

<u>問題4.</u> (局所有限な可算)無限多面体 P, Q について、$\dim P = \dim Q$ ならば、$C_p(P) \cong C_p(Q)$ か?

References

[1] K. Borsuk, Theory of Retracts, Monografie Mat. PWN, 1967
[2] D. S. Pavlovskii, On spaces of continuous functions, Soviet Math. Dokl. 22 (1980), 34-37.